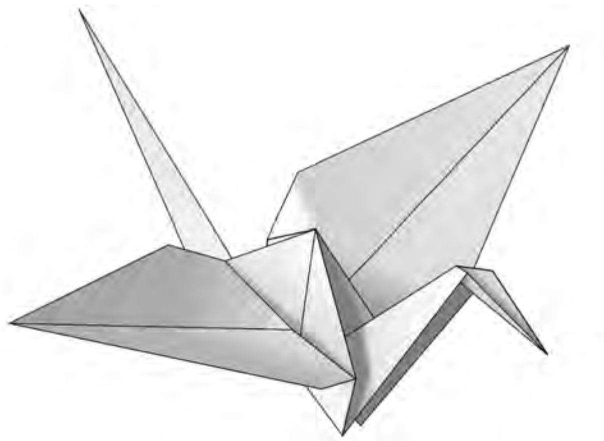
Les mathématiques de l'origami

Jean-Paul Delahaye
Université de Lille,
CRISTAL UMR Cnrs 9189 Bât M3-ext 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex

7 novembre 2018, IREM Strasbourg



On s'amuse et on exprime son talent créateur en pliant des feuilles de papier...

ou alors, on en fait un *sujet mathématique*.

La science du papier plié a connu des progrès considérables.

Ses aspects mathématiques constituent une discipline à part entière

l'art et les mathématiques se rejoignent dans les mains expertes des amateurs d'origami.

L'origami est l'art de plier du papier pour en faire une sculpture,

soit géométrique : une boîte, une étoile, un polyèdre, etc.

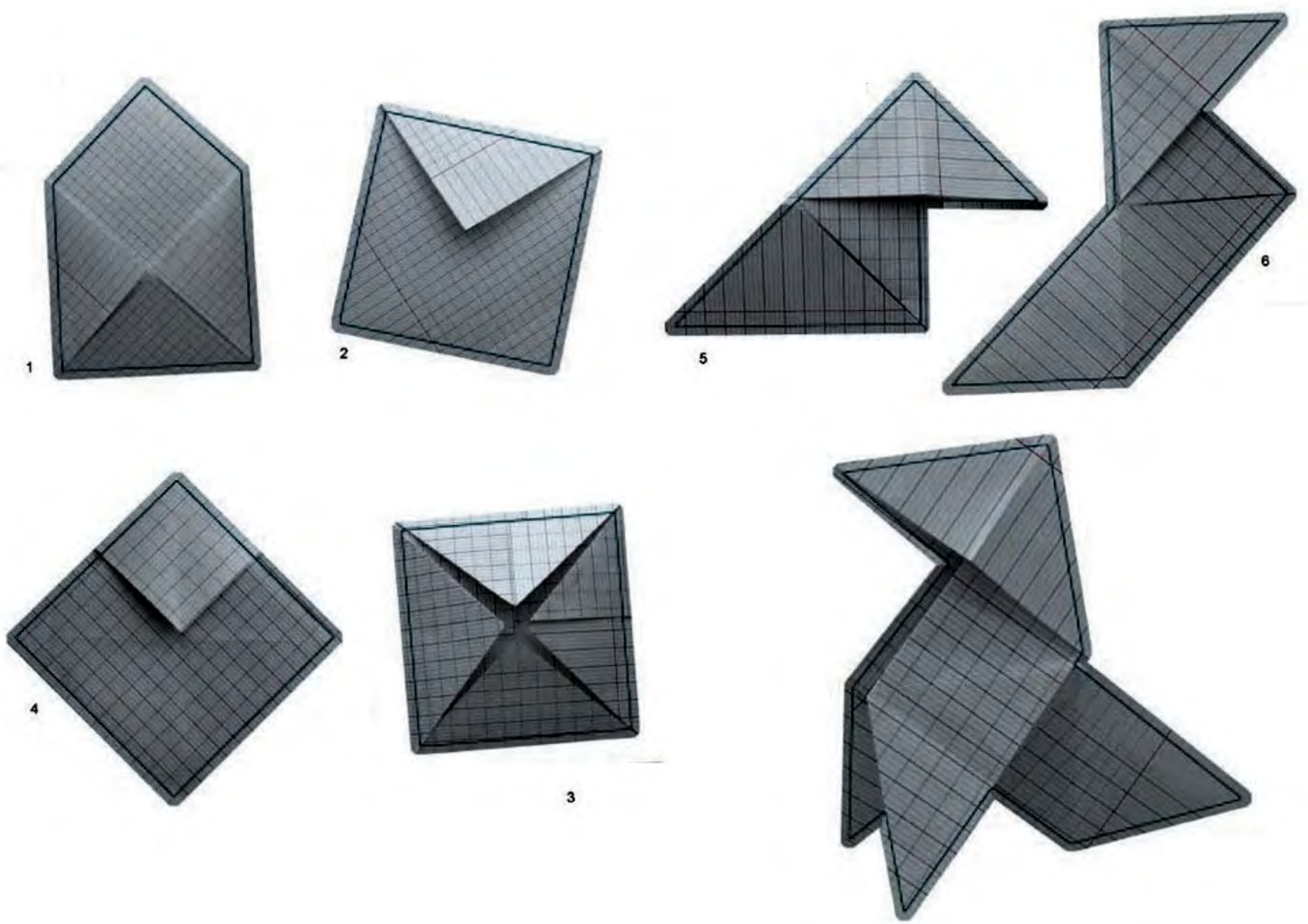
soit figurative: un animal, une fleur, un personnage, etc.

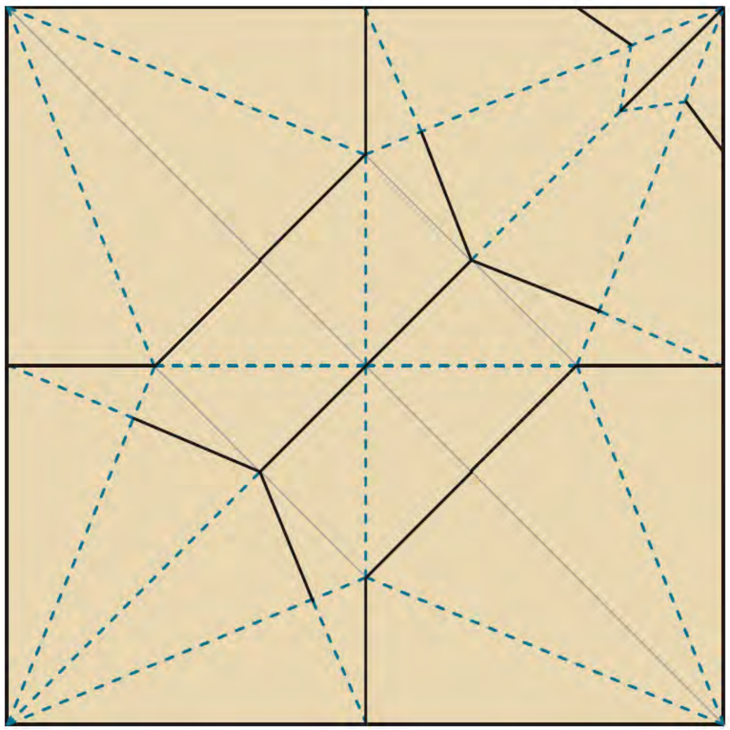
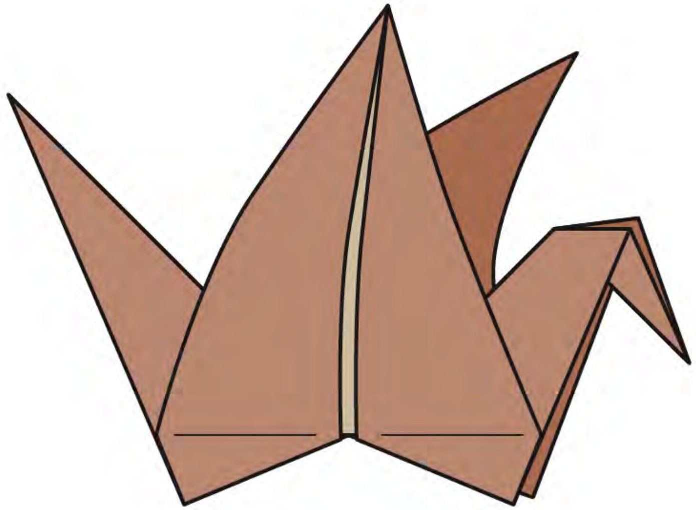
F**orme la plus pure de l'origami** :

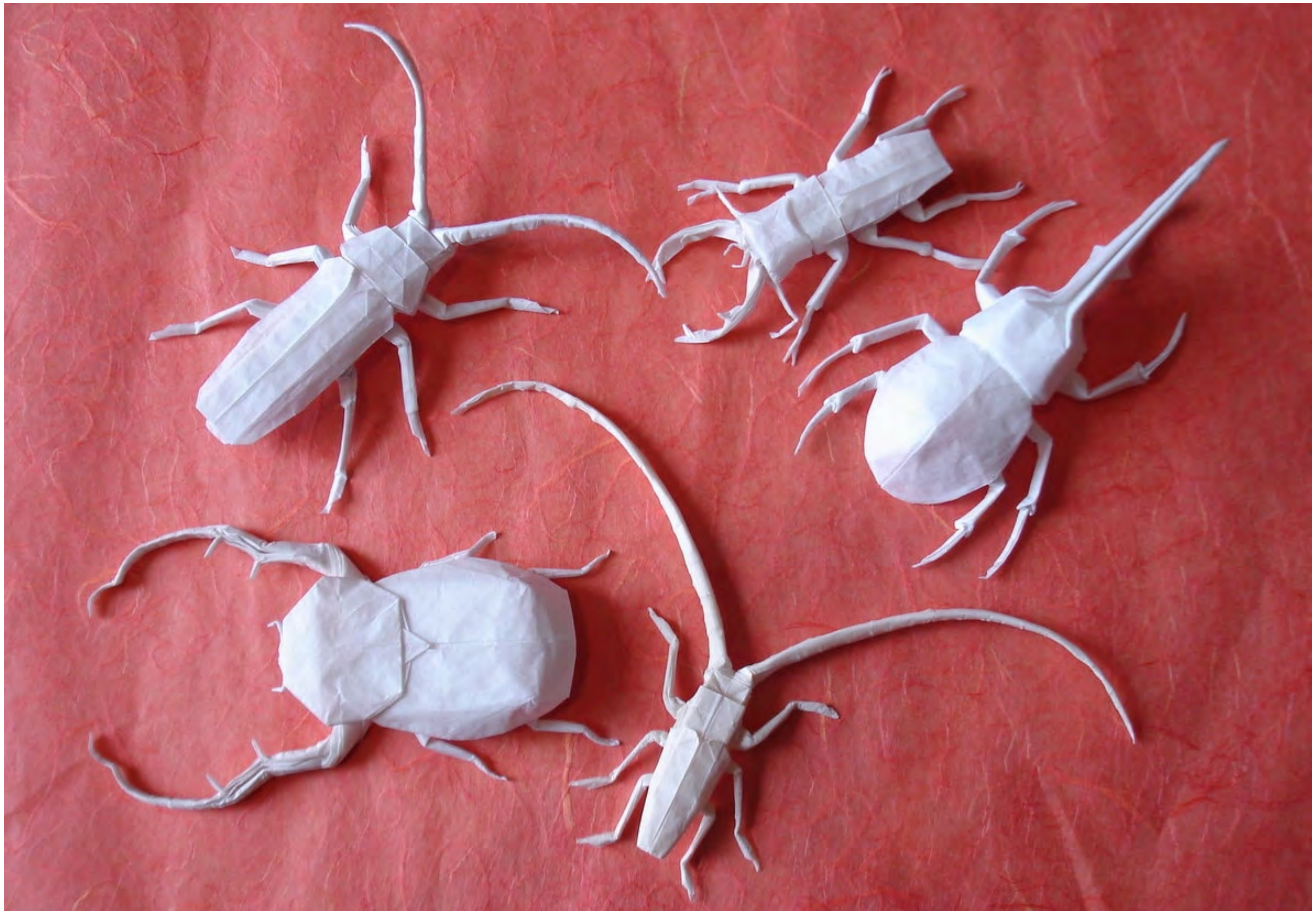
on part d'une **feuille carrée**, et on n'effectue que des plis rectilignes (sans découpage).

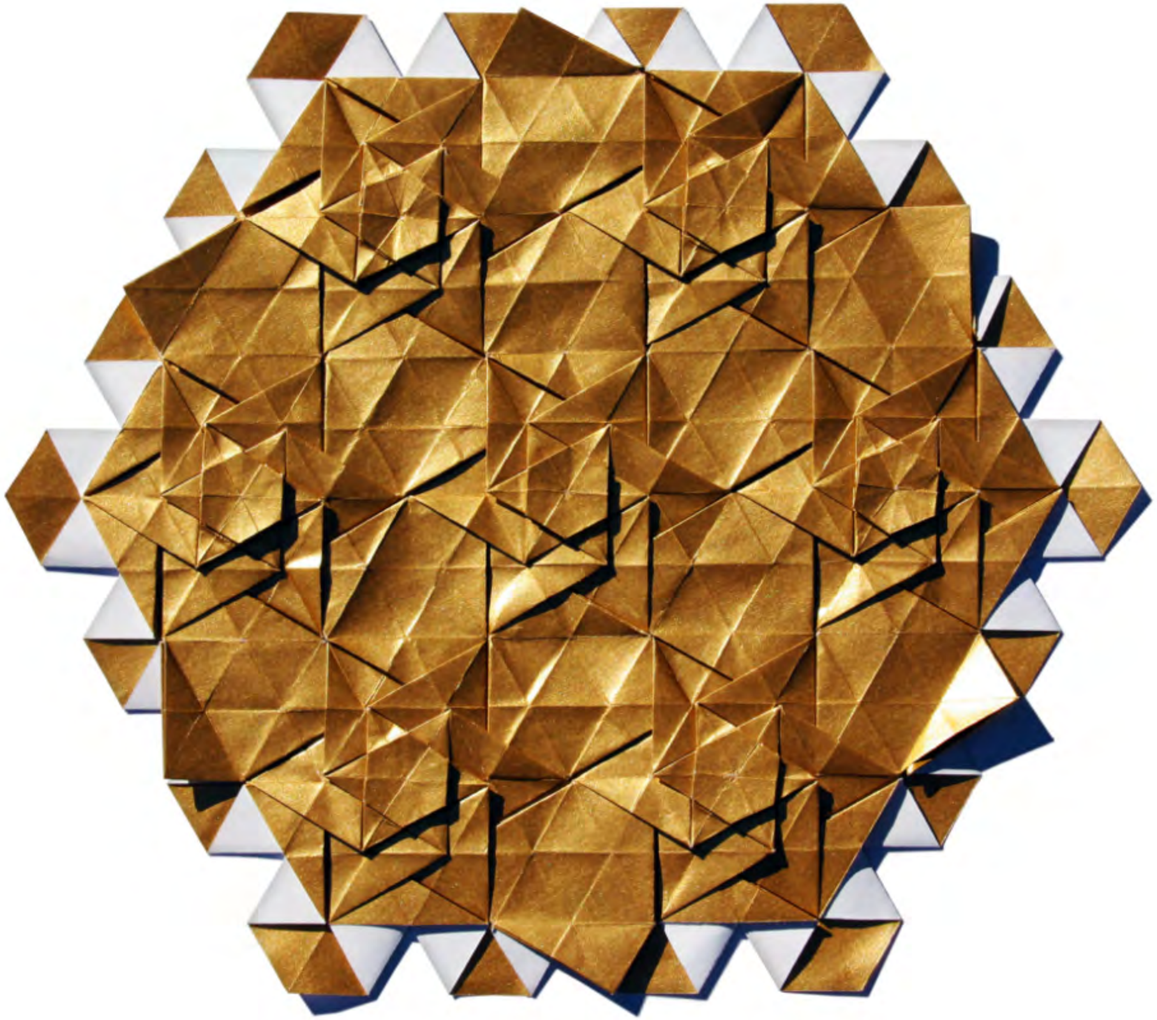
Autres formes d'origami :

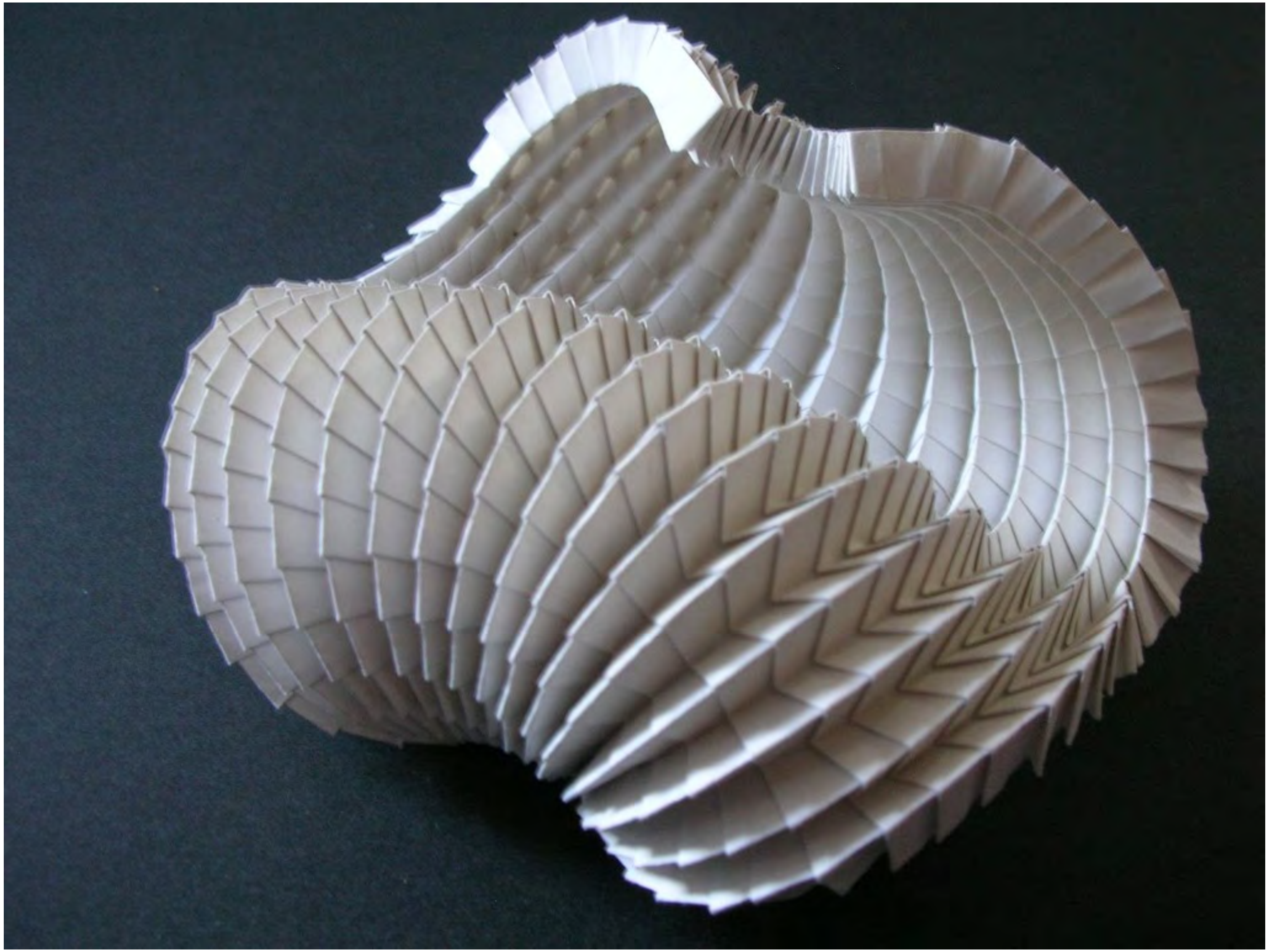
- on utilise **plusieurs feuilles** pour une même construction (origami **modulaire**),
- on **découpen** on **colle**, on **mouille** le papier pour en fixer la forme,
- on s'aide d'outils pour dessiner des plis arrondis.

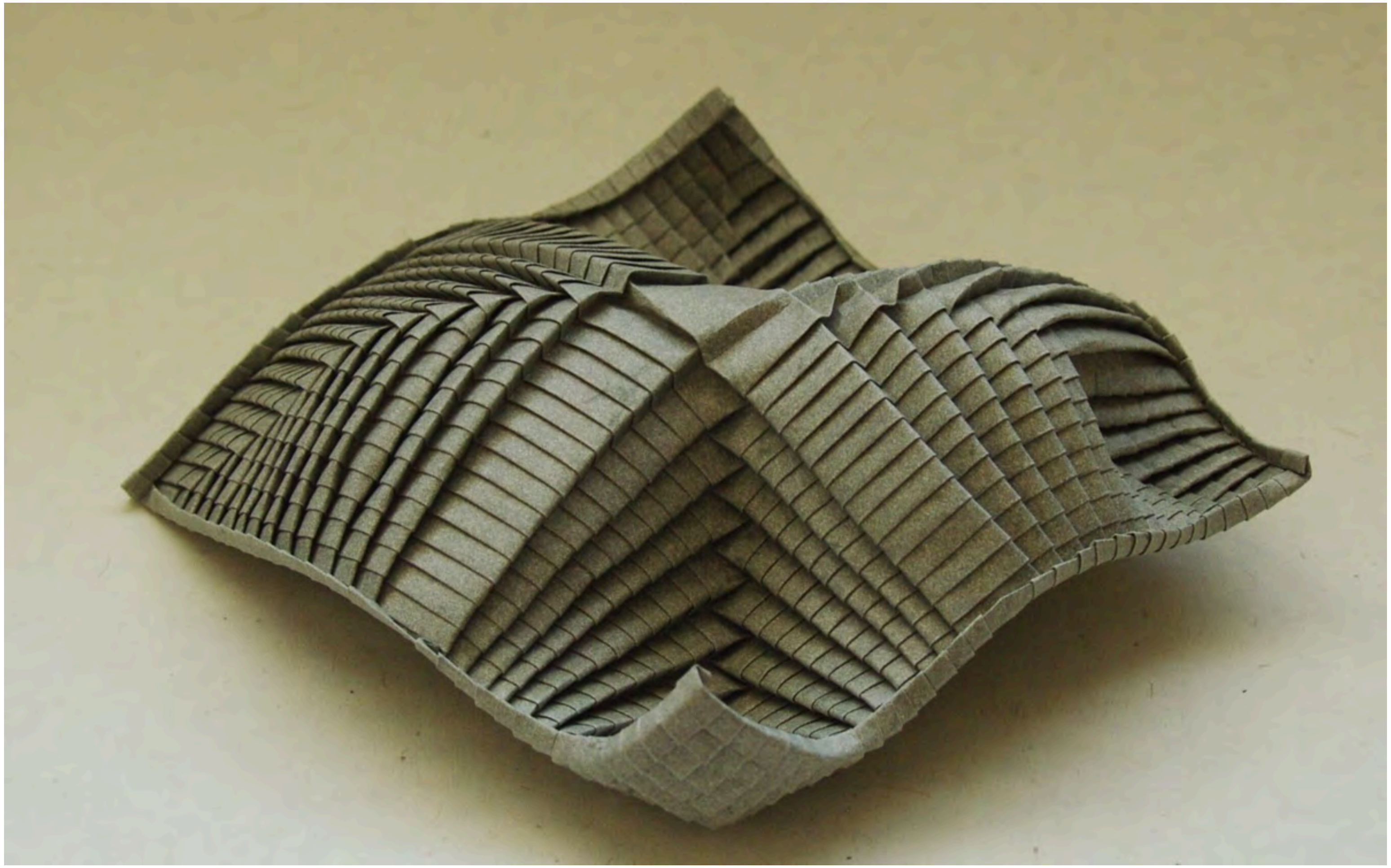

1
2
5
6
4
3

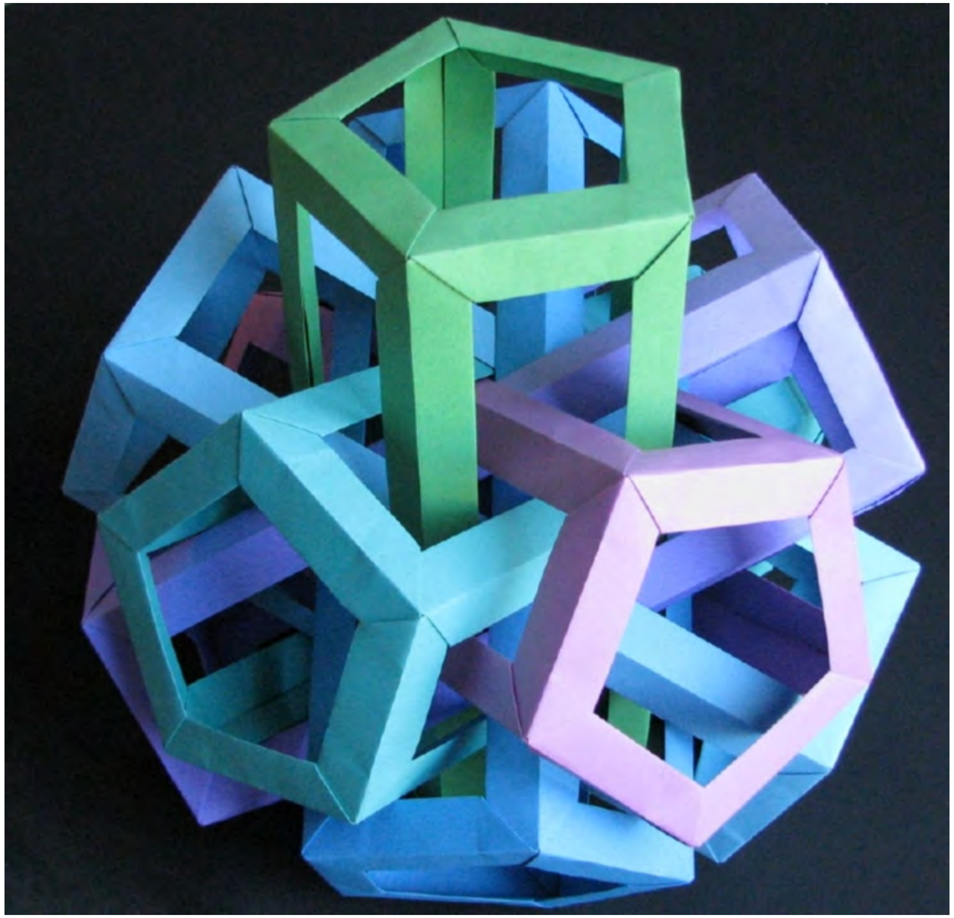
 











Demaine

Mitanei

Chun

L'origami comme art du pliage sans découpage ni collage à partir d'une feuille carrée est né au Japon au XVIIe siècle et s'est répandu dans le monde entier au XIXe.

Son histoire ancienne est difficile à retracer car les œuvres se conservent mal.

Des jeux des pliages ont existé en **Chine**, en **Italie**, en **Allemagne** et en **Espagne**.

Cela bien avant le récent succès mondial.

L'étude mathématique de l'origami a commencé dès 1907.

Elle a connu des progrès considérables depuis 30 ans.

Elle s'est révélée d'une très grande richesse.

On démontre de remarquables résultats permettant, en particulier, de savoir quels nombres sont

« **constructibles par origami** ».

Ces nombres sont analogues à ceux « **constructibles par la règle et le compas** » qui ont permis au XIXe siècle de résoudre (par la négative) le problème de la **quadrature du cercle.**

Depuis 1989, un congrès international sur les mathématiques de l'origami se réunit régulièrement.

La sixième édition de ce congrès s'est réunie en août 2014 à Tokyo.

Le dernier s'est tenu à Oxford en septembre 2018 : http://osme.info/7osme/

Les théorèmes que nous allons présenter constituent les bases d'une discipline qui concerne

- en **biologie** (dont le repliement des protéines est un problème central) ;

- dans le domaine des technologies nouvelles où la conception de structures reconfigurables, demande une fine compréhension des opérations **d'articulation et de pliage**.

Les canevas de plis

Commençons par nous concentrer **sur l'origami pur.**

-a- On prend une feuille de papier unique **carrée.**

-b- On utilise uniquement des plis rectilignes.

-c- On arrive à une **forme plate**.

Le pliage final produit une forme qui s'aplatit parfaitement,

sans déchirer la feuille, ni la froisser.

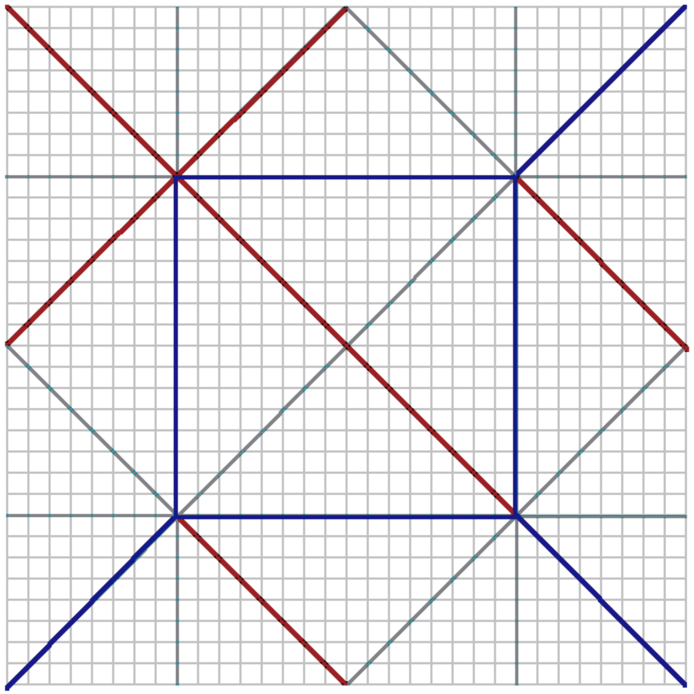
En France, le plus connu de ces pliages purs est **la cocotte en papier.**

Au Japon c'est un autre oiseau : **la grue.**

On fait une "cocotte". Une fois le résultat obtenu, on déplie la feuille et on considére les dessins marqués sur cette feuille par les plis (uniquement ceux vraiment utiles à la forme finale) :

en **rouge pour les plis "montagnes",** le **bleu pour les plis "vallée".**

C'est le **canevas de l'origami** (crease pattern).



La cocotte

N'importe quel schéma de traits rectilignes bleus et rouges **n'est pas un canevas possible**.

Deux théorèmes indiquent les règles que tout canevas d'origami vérifie.

Ces règles permettent de reconnaître des erreurs dans le dessin d'un canevas.

Le premier théorème indique que :

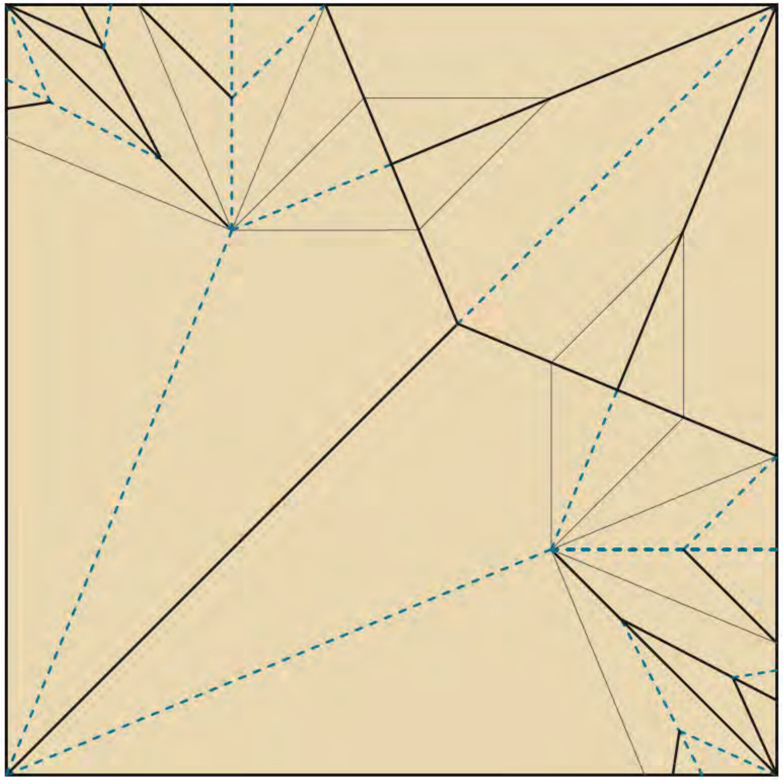
Le nombre de traits rouges, R, se rencontrant en un point intérieur à la feuille doit être le même que le nombre de traits bleus, B, additionné de 2, ou auquel on enlève 2 :

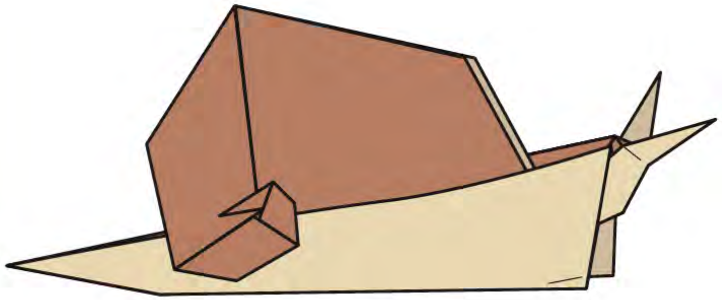
$$\mathbf{R = B + 2 \quad ou \quad R = B - 2}$$

Découvert en 1989 par le Français **Jacques Justin** et redécouvert par le Japonais **Jun Meakawa.**

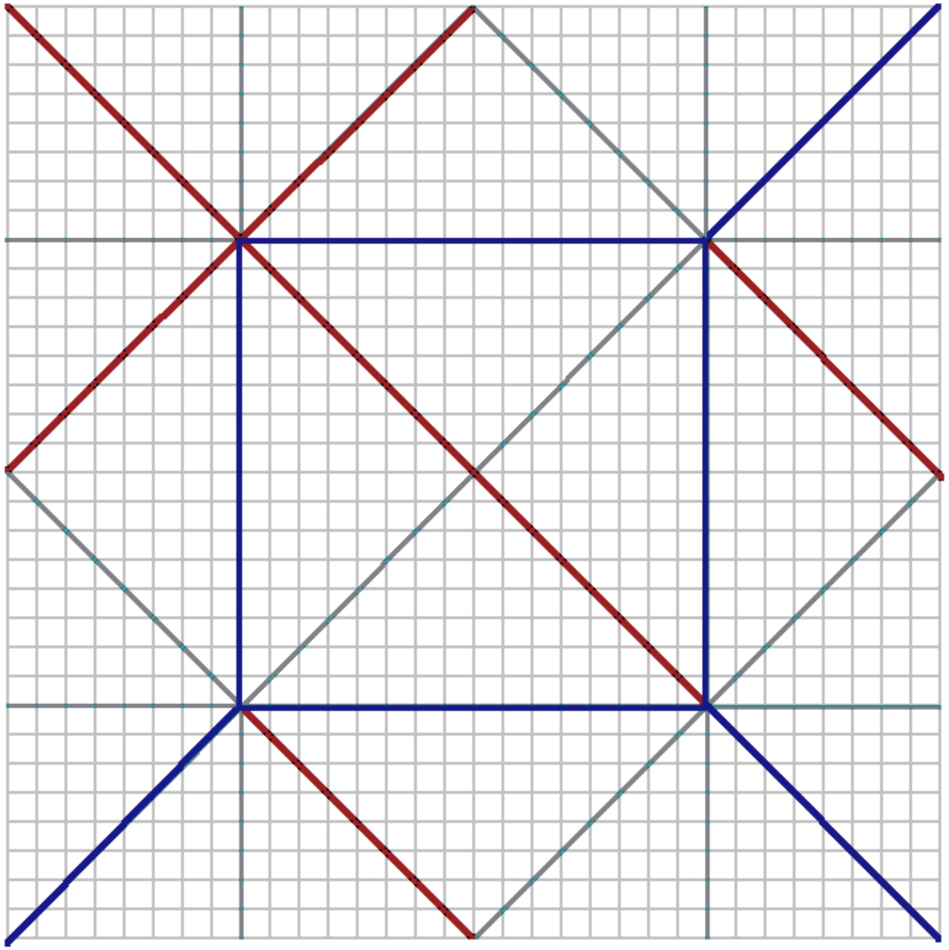
Aujourd'hui tout le monde parle du : **Théorème de Meakawa**

Il est étonnant que cette règle simple qu'on démontre facilement ait été ignorée aussi longtemps.



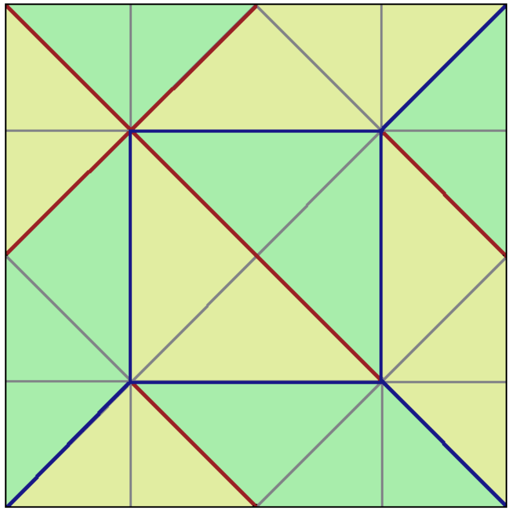


Robert Lang



Conséquence du théorème de Meakawa :

Les zones de la feuille délimitées par les plis "montagne" (rouge) ou "vallée" (bleu) sont coloriables avec deux couleurs sans que deux zones voisines soient colorées de la même couleur.



Théorème de Kawasaki

Les angles que font entre eux les arcs se rejoignant en un même sommet intérieur

$$a_1, \; a_2, \; ..., \; a_{2n}$$

(ils sont nécessairement en nombre pair) vérifient :

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... - a_{2n} = 0.$$

Bien sûr :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{2n} = 360°,$$

On en déduit que la somme des angles ayant un numéro pair vaut 180°, de même que celle des angles ayant un numéro impair.

Pour la cocotte en papier, les angles du sommet où se rejoignent 4 arcs rouges et 2 bleus sont

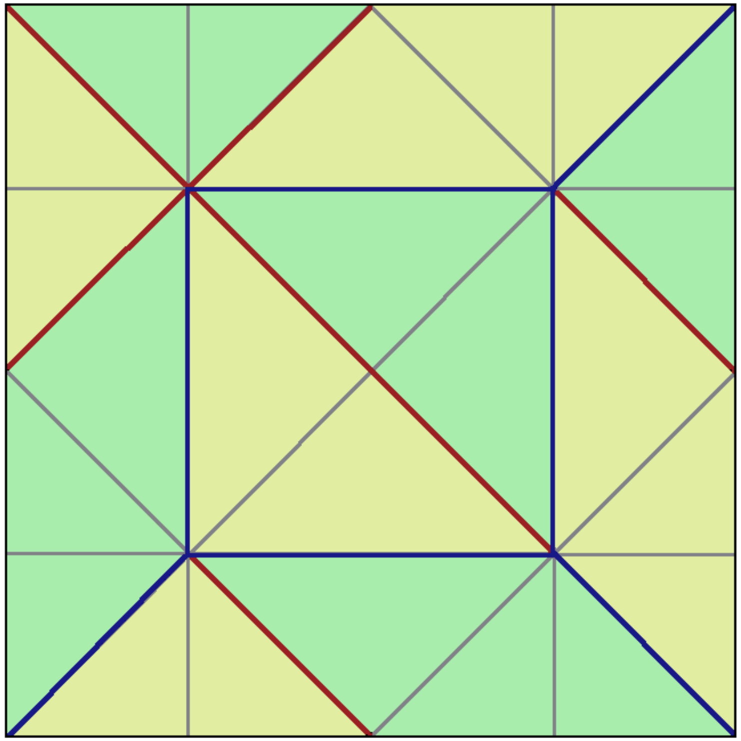
$$a_1 = 90°,\ a_2 = 90°,\ a_3 = 45°,\ a_4 = 45°,\ a_5 = 45°,\ a_6 = 45°$$

et on a :

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 = 0$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 360°$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 180° \qquad a_0 + a_2 + a_4 + a_8 = 180°$$



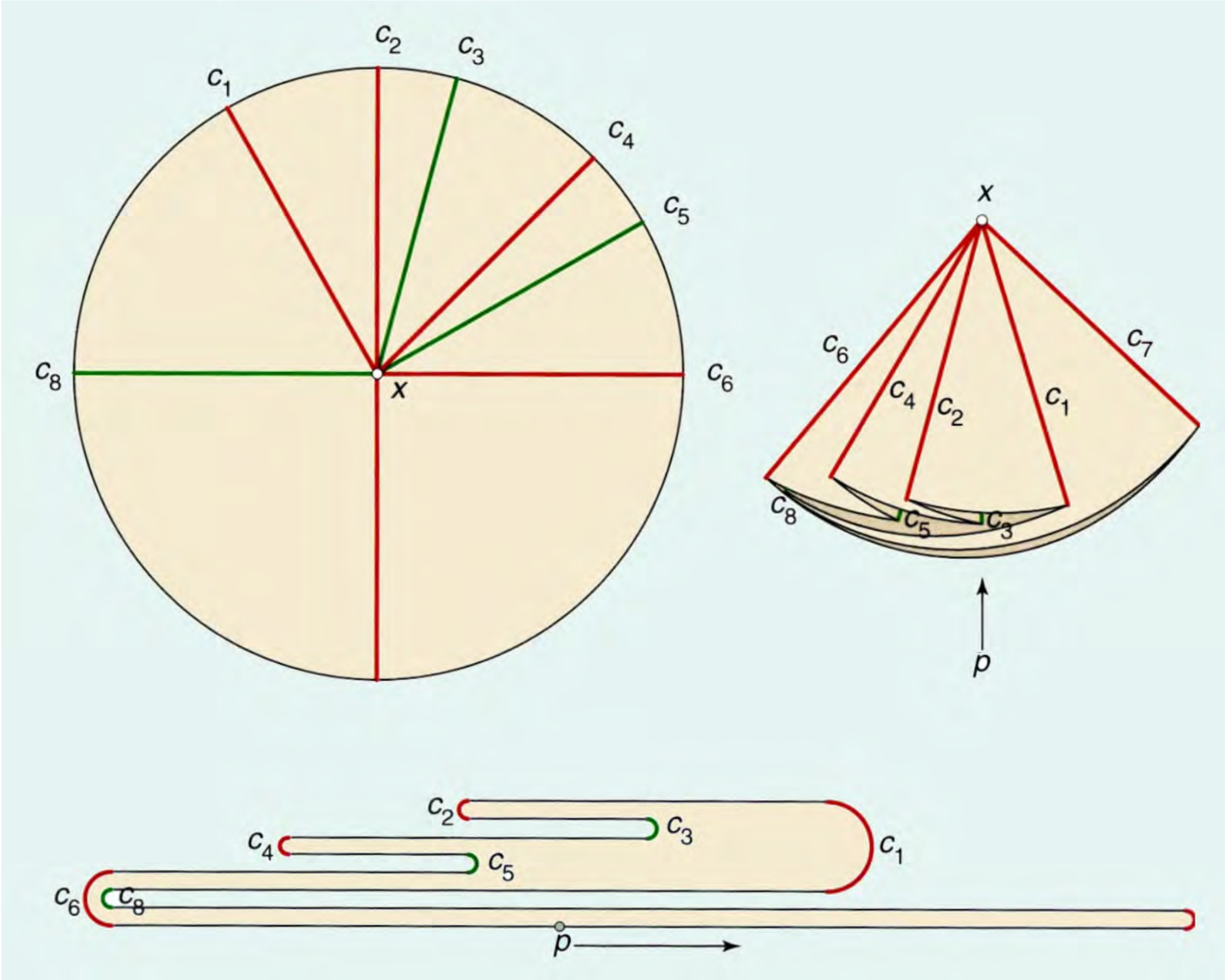
Démonstration des théorèmes de Meakawa et Kawasaki

L'observation attentive d'un dessin permet de comprendre les 2 théorèmes.

L'idée est que, d'une part, le point *p* en parcourrant le bord de la découpe circulaire va aller autant (mesuré en angle) à droite qu'à gauche, et que d'autre part, il ne peut revenir à son point de départ qu'en faisant 2 demi-tours ou 4, ou 6 etc. (dessin en bas).

Arguments plus précis à la page de Tom Hull :

http://mars.wne.edu/~thull/combgeom/flatfold/flat.html



c2
c3
c1
c4
c5
c8
x
c6
x
c6
c7
c4
c2
c1
c8
c5
c3
p
c2
c3
c4
c1
c5
c6
c8
p

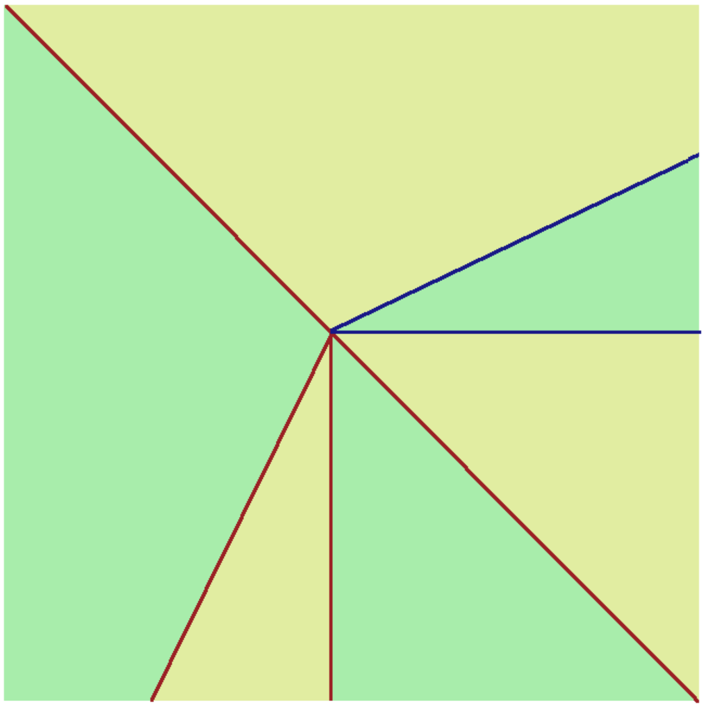
Si on vous propose un canevas d'origami, vous pouvez rapidement détecter qu'il est impossible.

Tout canevas d'un origami strict possédera les trois propriétés, cependant,

ne pas croire que tout canevas qui les possède rend possible un pliage selon les plis du canevas.

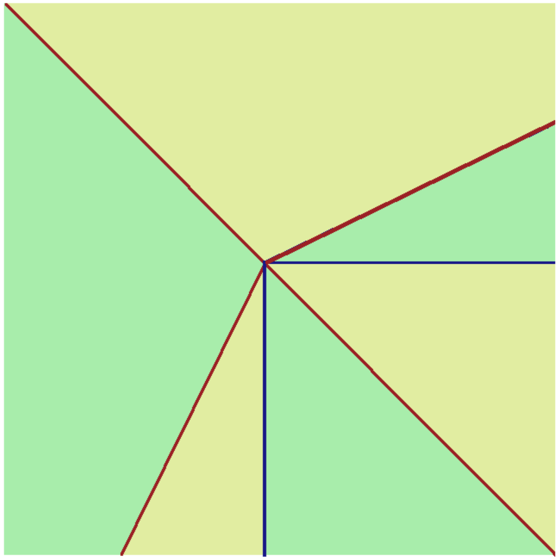
En effet, en voulant opérer les pliages dessinés, on rencontre parfois une situation où il faudrait forcer la feuille à se traverser elle-même.

Sommet impossible :



La condition $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_{2n} = 0$ sur les angles autour d'un nœud du graphe est en fait nécessaire et suffisante pour qu'il existe une façon de plier **localement** à plat la feuille.

Si nécessaire, on change les couleurs des plis et le pliage devient possible :



Si la condition du théorème de Kawasaki est vérifiée, il existe une façon de choisir pour chaque pli dessiné s'il est "montagne" ou "vallée" et qui permet le pliage à plat.

Une question naturelle se pose alors :

si un dessin de plis (ne précisant pas les plis "vallée" et "montagne") est donné,

tel que chaque nœud du graphe vérifie la condition du théorème de Kawasaki

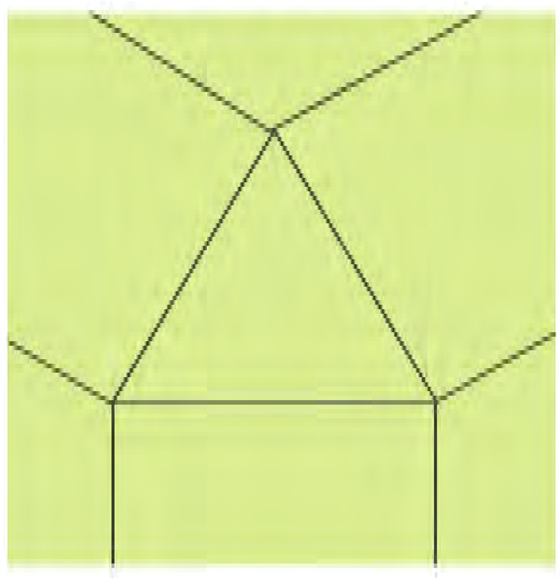
(donc chaque nœud est localement pliable à plat)

peut-on le plier globalement à plat ?

La réponse est non !

Voici un exemple où, localement les pliages à plats sont possibles, mais où, globalement ils sont incompatibles. Exemple proposé par Thomas Hull en 1994.

Chaque sommet est pliable, mais le pliage à plat de l'ensemble est impossible.



Autre question

Un graphe est donné sur une feuille, est-il possible de choisir

"montagne" ou "vallée" pour chaque pli

de façon à satisfaire les deux théorèmes ?

Oui.

Marshall Haye et Barry Haye ont décrit un algorithme

- qui fonctionne en temps linéaire (en fonction du nombre d'arcs du graphe)
- et qui trouve une telle assignation s'il y en a, ou conclut qu'il n'en existe pas.

Trouver une telle assignation malheureusement ne garantit pas que le pliage est faisable !

Nouvelle question :

Disposant d'une assignation correcte (c'est-à-dire satisfaisant les deux théorèmes)

peut-on rapidement savoir si la feuille est pliable globalement à plat

selon les plis de l'assignation ?

La réponse est non.

Le problème est NP-complet.

Cela signifie :

- on ne connaît aucun algorithme pouvant le résoudre en temps polynomial, et

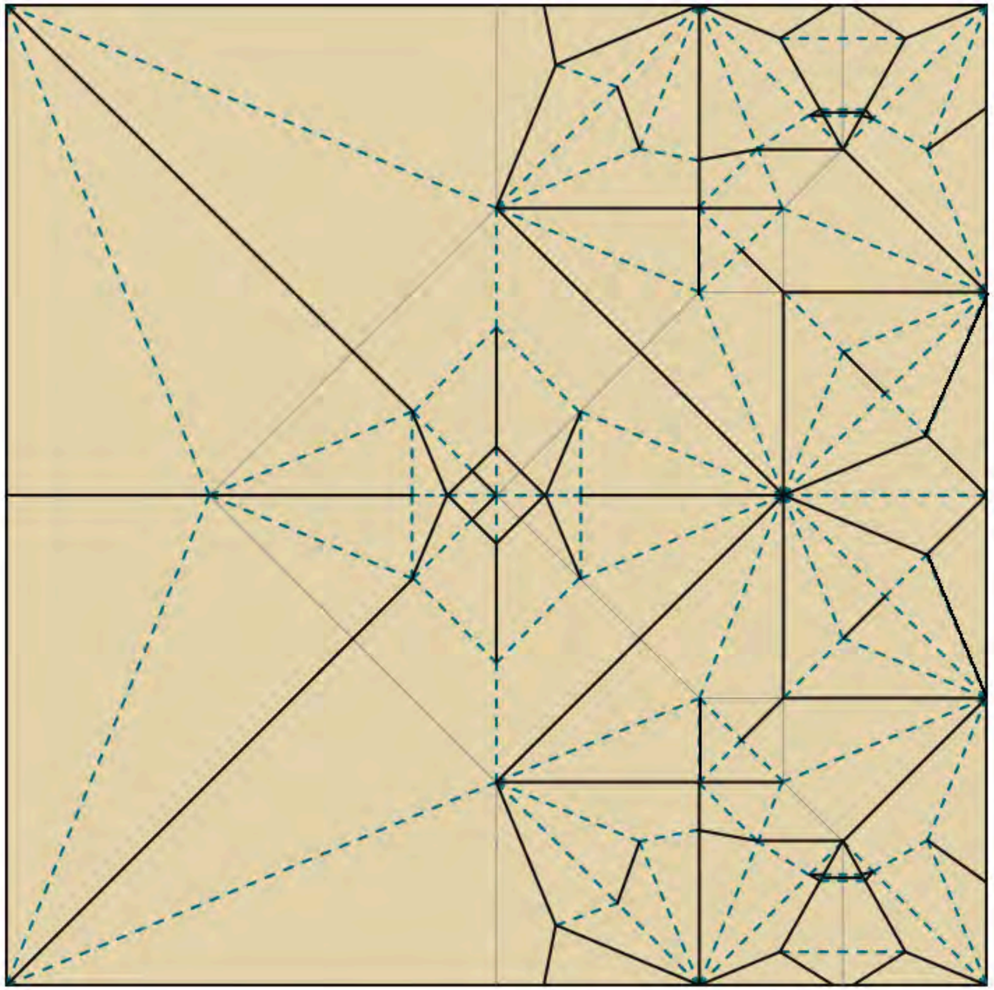
- il n'en existe pas, s'il est vrai que P ≠ NP (ce que pense presque tout le monde)

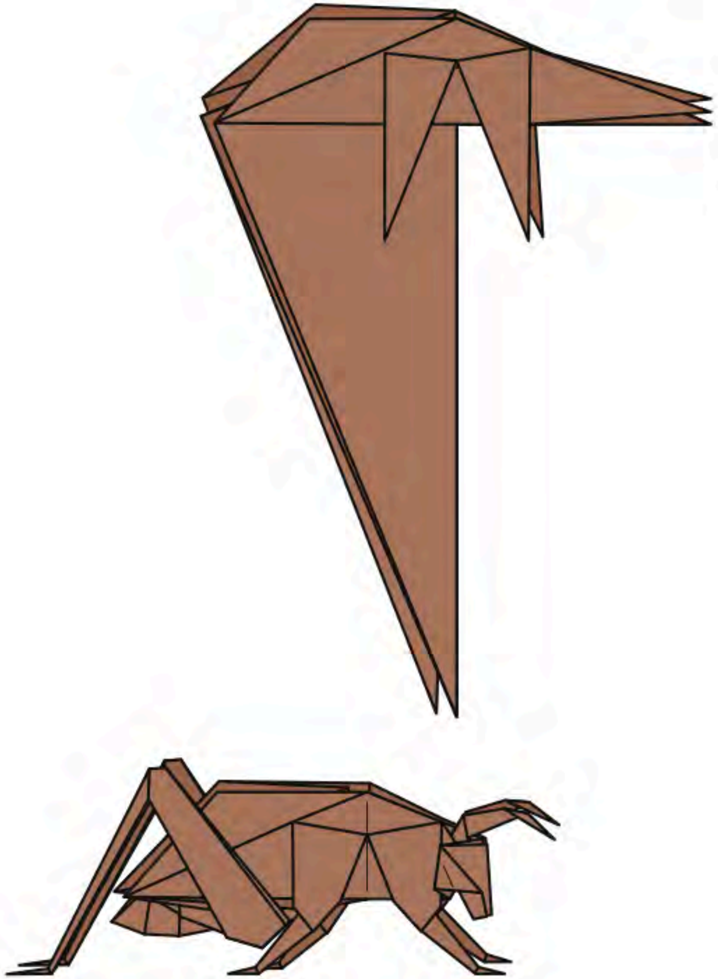
Voici un canevas dû au grand origamiste Robert Lang avec le pliage qu'il permet (les plis "montagne" sont tracés en noir et les plis "vallée" en pointillé bleu).

On pourra vérifier que les deux théorèmes sont satisfaites à chaque nœud interne de la feuille.

Pour un bon origamiste, parait-il, la connaissance du canevas et d'une image du but suffit :

- il devinera comment et dans quel ordre opérer les plis pour arriver à la sculpture en papier.





Axiomes de l'origami

Quand on opère des plis, par exemple pour amener l'un sur l'autre deux plis déjà marqués sur la feuille, on réalise l'équivalent d'une construction géométrique sur la feuille.

Les axiomes de Justin-Huzita-Hatori

Les constructions de plis et de points par intersection de plis faisables lorsqu'on manipule une feuille de papier (supposée plane) sont décrites par 7 axiomes découverts par

Jacques Justin, Humaki Huzita, Koshiro Hatori.

Axiome 1. Si deux points sont donnés p_1 et p_2, il existe un pli unique qui passe par eux.

Axiome 2. Si deux points sont donnés p_1 et p_2, il existe un pli unique qui amène p_1 sur p_2.

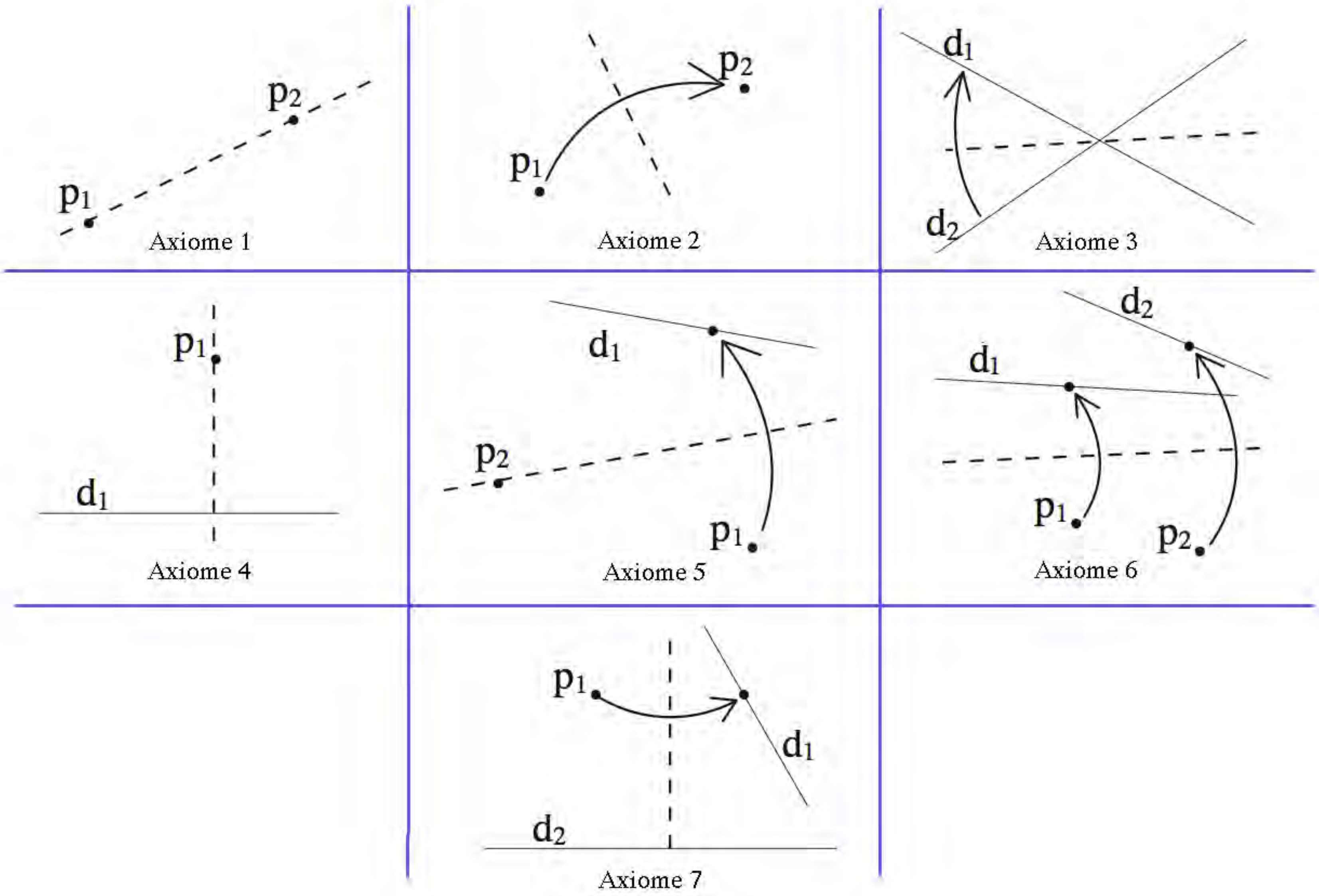
Axiome 3. Si deux droites sont données d_1 et d_2, il existe un pli qui amène d_1 sur d_2.

Axiome 4. Si un point p_1 est donné ainsi qu'une droite d_1, il existe un pli unique perpendiculaire à d_1 qui passe par p_1.

Axiome 5. Si deux points sont donnés p_1 et p_2 ainsi qu'une droite d_1, il existe un pli qui place p_1 sur d_1 et qui passe par p_2.

Axiome 6. Si deux points sont donnés p_1 et p_2 ainsi que deux droites d_1 et d_2, il existe un pli qui place p_1 sur d_1 et p_2 sur d_2.

Axiome 7. Si un point p est donné ainsi que deux droites d_1 et d_2, il existe un pli qui place p sur d_1 et qui est perpendiculaire à d_2.


p1
p2
Axiome 1
p1
p2
Axiome 2
d1
d2
Axiome 3
p1
d1
Axiome 4
d1
p2
p1
Axiome 5
d2
d1
p1
p2
Axiome 6
p1
d1
d2
Axiome 7

Ces axiomes n'envisagent qu'un seul pli à la fois.

La possibilité de faire plusieurs plis à la fois a été étudiée (voir plus loin).

Si on dispose de **deux points de départ distant d'une unité**, et qu'on considère tous les points que peuvent faire apparaître les pliages successifs de la feuille sur laquelle ils sont donnés (ce qui revient à appliquer les axiomes 1-7) les coordonnés des points résultants constituent

l'ensemble des nombres constructibles par origami, que nous noterons *OR*.

L'idée de la définition est analogue à celle de l'ensemble des **nombres constructibles à la règle et au compas** défini à partir de deux points distants d'une unité quand on opère des tracés successifs utilisant une règle (non graduée) et un compas.

Cet ensemble des nombres constructibles à la règle et au compas est noté *RC*.

Le problème de la **quadrature du cercle** est le suivant :

- un cercle étant donné sur un plan, peut-on avec une règle et un compas dessiner un carré dont l'aire soit la même que celle du disque délimité par le cercle ?

Ce problème est équivalent à savoir si le nombre π est dans ***RC***.

Grâce, aux travaux de **Ferdinand Lindemann**, on sait depuis 1882, que la réponse est négative :

Aucune construction à la règle et au compas partant de deux points distant d'une unité ne permet d'en construire deux distants de π unités.

La théorie montre aussi que

$$\sqrt[3]{2}$$

n'est pas dans ***RC***.

La **trisection d'un angle quelconque** n'est pas faisable à la règle et au compas.

Il était naturel de s'interroger sur l'ensemble ***OR.***

Est-ce que ***OR*** est égal à ***RC***, plus petit, plus grand ou incomparable ?

Réponse : ***OR*** est strictement plus grand que ***RC***.

- π n'est pas dans ***OR*** (pas de changement pour la quadrature du cercle).

- $\sqrt[3]{2}$ est dans ***OR*** :

  L'antique problème de la duplication du cube se résout par origami !!!

- Il est aussi possible aussi de **trissecter** n'importe quel angle par origami.

Le théorème de Haga

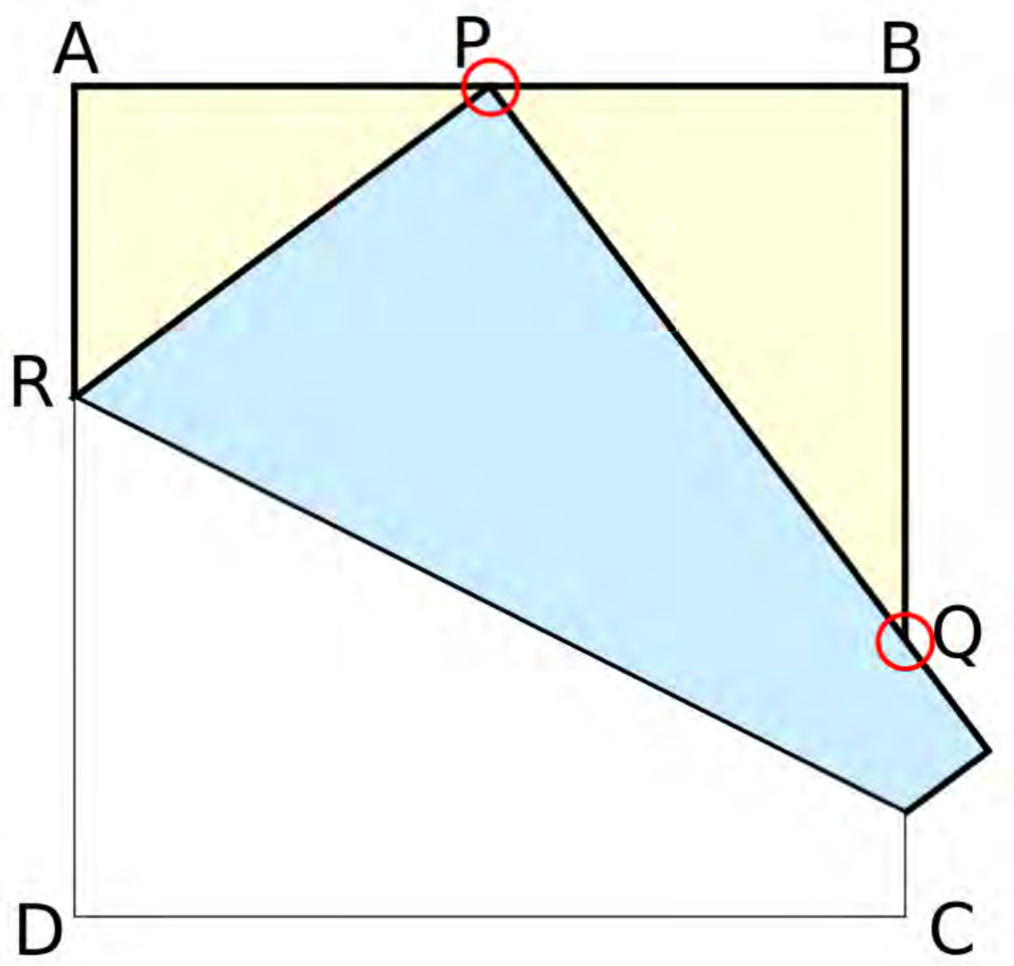
Les nombres rationnels

Le théorème de Kazuo Haga indique un moyen de construire tout nombre rationnel.
On part d'une feuille carrée de côté 1, sur laquelle est marqué un point P sur le bord en haut.
Ce point P a été obtenu par des opérations de plis effectuées précédemment.
On opère le pli qui amène le coin en bas à gauche sur P.
Un petit raisonnement montre que le point Q est tel que si on pose

$$x = AP \quad \text{et} \quad y = BQ$$

$$\text{alors} \quad y = 2x/(1+x).$$

Si vous prenez $x = 1/2$ vous obtenez donc $y = 2/3$, d'où vous déduisez 1/3.


A
P
B
R
Q
D
C

Grâce à ce procédé on obtient tous les rationnels (positifs).

AP	BQ	QC	AR	PQ
x	$\frac{2x}{1+x}$	$\frac{1-x}{1+x}$	$\frac{1-x^2}{2}$	$\frac{1+x^2}{1+x}$
$1/2$	$2/3$	$1/3$	$3/8$	$5/6$
$1/3$	$1/2$	$1/2$	$4/9$	$5/6$
$2/3$	$4/5$	$1/5$	$5/18$	$13/15$
$1/5$	$1/3$	$2/3$	$12/25$	$13/15$

$$\sqrt[3]{2}$$

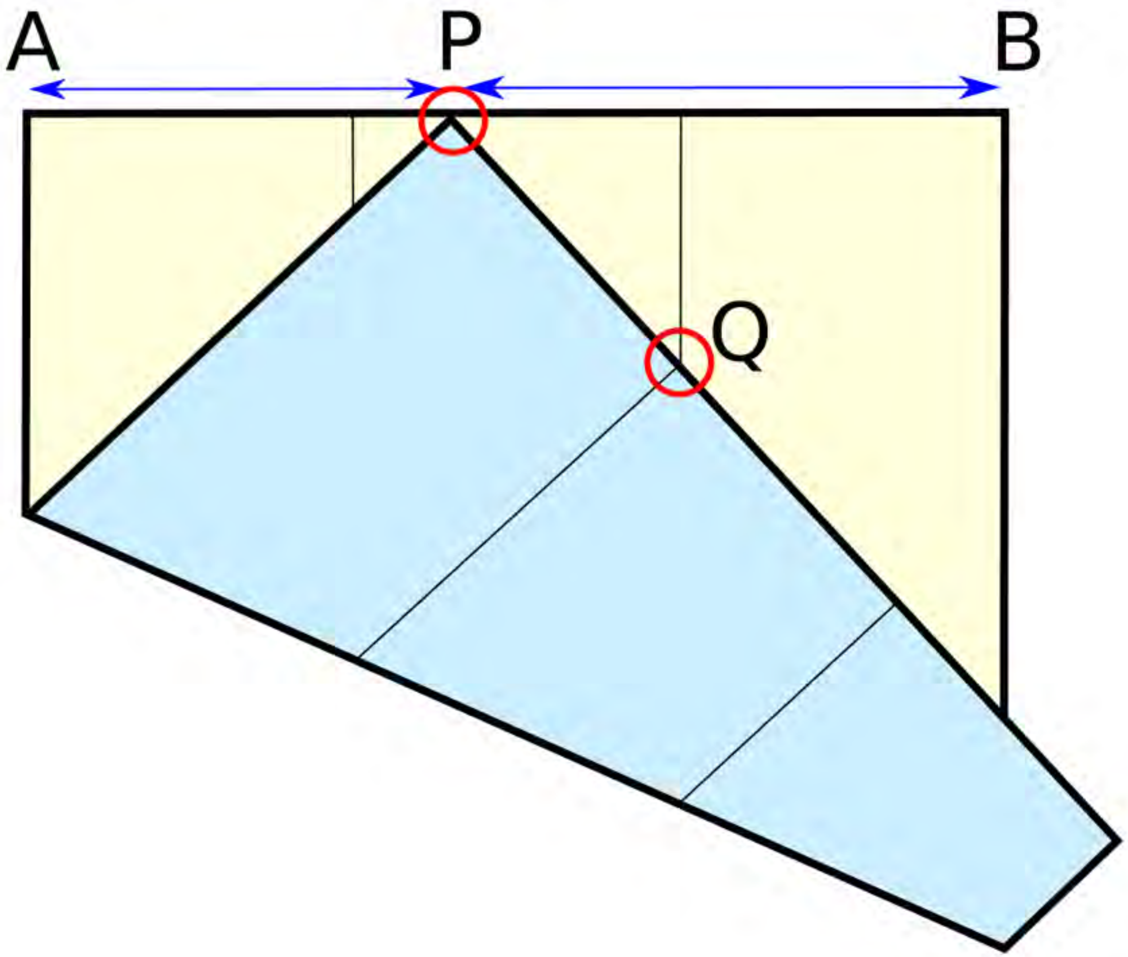
La construction de Peter Messer permet de "calculer" $\sqrt[3]{2}$ en quelques plis.

On commence par faire deux plis verticaux sur la feuille carrée (de côté 1) qui y dessinent trois bandes de largeur 1/3 (par exemple en utilisant le théorème de Haga).

Ensuite, on plie la feuille en amenant le coin en bas à gauche du carré sur le bord supérieur de la feuille, en même temps qu'on amène le point Q (en bas sur le premier plis vertical (à 1/3 du côté gauche du carré) sur le second pli vertical (à 2/3 du côté gauche du carré).

Le rapport PB/PA vaut

$$\sqrt[3]{2}$$


A
P
B
Q

We produce Peter Messer's method of finding the cube root of 2 here, as it is interesting in its own right. First, we fold a square piece of paper into thirds (see figure 2). One way to do this is to make a middle-point mark, M, on one edge of the paper, $\overline{AD}$, by folding the line $\overline{AB}$ on the line $\overline{DC}$, and making a pinch mark on the side of $\overline{AD}$. Then we make a fold that connects point B and point M. We make another fold that passes through point A and point C. Denote the intersection of $\overline{AC}$ and $\overline{BM}$ as O. Then make a fold, denoted as $\overline{PQ}$, passing through O and perpendicular to $\overline{AB}$. Folding $\overline{BC}$ on the line $\overline{PQ}$, the resulting fold is denoted as $\overline{RS}$. Then $\overline{PQ}$ and $\overline{RS}$ divide the square into three equal strips.

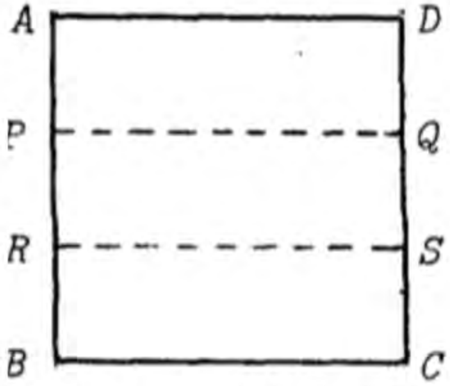


FIGURE 2. Divide a square paper into three equal parts

Using Beloch's fold, we make a fold to place point C onto line $\overline{AB}$ (the left side of the square) and point S onto the line $\overline{PQ}$, simultaneously (see figure 3). Let CB be one unit. Let AC be x and BT be y. The side of the square is $s = 1 + x$. From the construction, BP equals two thirds of a side of a square. That is,

$$BP = \frac{2}{3}s = \frac{2(x+1)}{3} \Rightarrow CP = BP - CB = \frac{2(x+1)}{3} - 1 = \frac{2x-1}{3}.$$

From the way the paper is folded, we can see that CT is $x + 1 - y$. Apply the Pythagorean theorem to the right triangle, CBT, and we have

$$CB^2 + BT^2 = CT^2 \Rightarrow 1 + y^2 = (x + 1 - y)^2.$$

Solving for y, we obtain $$y = \frac{x^2 + 2x}{2x + 2}.$$

Again, from the construction we can see that AP is a third of the side of the square. Thus $$AP = \frac{1}{3}s = \frac{x+1}{3} \Rightarrow CP = x - \frac{1}{3}s = x - \frac{1+x}{3} = \frac{2x-1}{3}.$$

Using the fact that triangle CBT is similar to triangle PSC, we have $\frac{BT}{CT} = \frac{CP}{CS}$. That is, $$\frac{y}{x+1-y} = \frac{\frac{2x-1}{3}}{\frac{x+1}{3}} \Rightarrow \frac{y}{x+1-y} = \frac{2x-1}{x+1}.$$

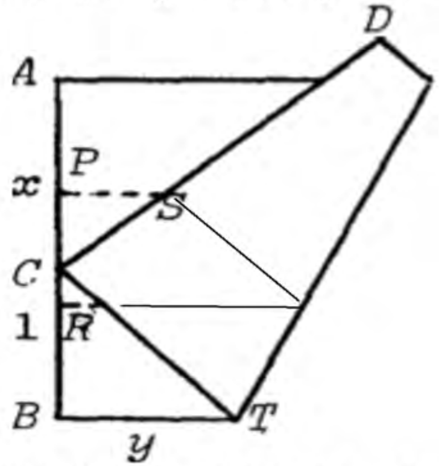


FIGURE 3. Peter Messer's method for finding the cube root of 2

We then acquire a second expression for y, namely,

$$y = \frac{2x^2 + x - 1}{3x},$$

Equating the two expressions for y, $\frac{x^2+2x}{2x+2} = \frac{2x^2+x-1}{3x}$., and solving for x, we obtain $x = \sqrt[3]{2}$.

http://commons.pacificu.edu/ijurca/vol7/iss1/3
DOI: http://dx.doi.org/10.7710/2168-0620.1042

La trisection de l'angle

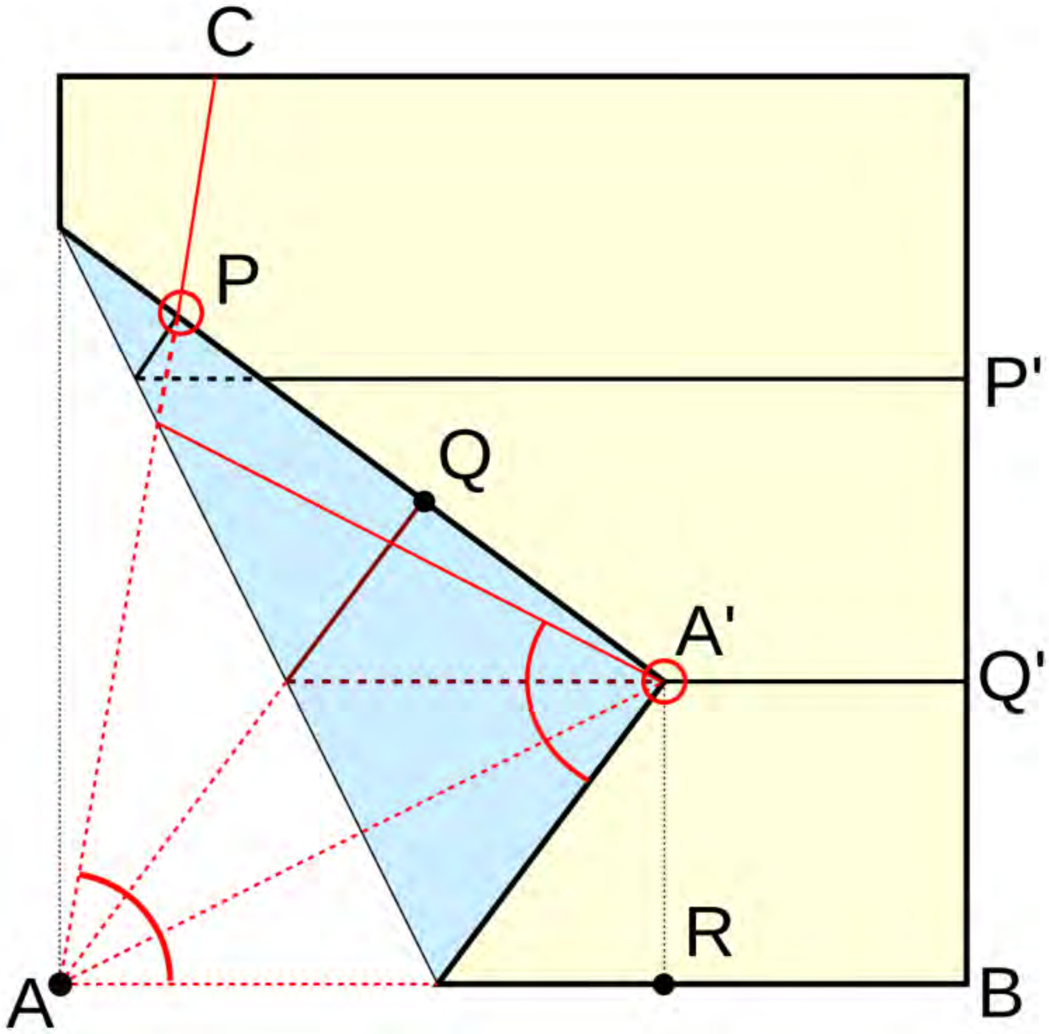
Trisection de l'angle de **Hisashi Abe.**

L'angle qu'on veut trissecter est l'angle CAB.

On commence par faire deux plis horizontaux PP' et QQ' de telle façon que QQ' soit au milieu entre PP' et le bord inférieur du carré de papier.

Ensuite, on fait le pli qui amène P sur AC, en même temps que le point A est amené sur le pli QQ'.

L'angle A'AB est le tiers de l'angle CAB (car les trois angles PAQ, QAA', A'AB sont égaux).


C
P
P'
Q
A'
Q'
R
A
B

Nombres pythagoriciens

Si on s'impose de n'utiliser que **les quatre axiomes les plus simples** — on parle **d'origami pythagoricien** —, le pouvoir de construction géométrique obtenu est celui de la règle et du **compas à pointes sèches** (qui permet de reporter des longueurs mais pas de dessiner des cercles).

Ce pouvoir de construction définit les **nombres pythagoriciens** qui sont les nombres pouvant intervenir dans les coordonnées d'un point résultat d'une construction avec les quatre axiomes (ou avec la règle et le compas à pointe sèche).

Leur caractérisation algébrique est simple :

- ce sont les nombres qu'on obtient en partant des entiers, et en opérant successivement autant de fois qu'on le veut, des **additions**, des **soustractions**, des **multiplications**, des **divisions** et l'**opération qui à *a* et *b* associe la racine carrée de $a^2 + b^2$**.

Le nombre $\sqrt{2}$ est un nombre pythagoricien car $2 = 1^2 + 1^2$.

De même que le nombre :

$$\frac{\sqrt{9+(1+\sqrt{2})^2}}{11\,/\,\sqrt{2}}$$

Le nombre π et la racine cubique de 2, ne sont pas pythagoriciens.

Nombres euclidiens

Le pouvoir de construction des quatre premiers plis est inférieur à celui de la règle et du compas.

Pour obtenir ce pouvoir de construction, le 5ème type de plis (défini par l'axiome 5) est ajouté.

Avec les cinq premiers plis, on arrive au pouvoir de construction de la règle et du compas.

Les nombres obtenus s'appellent les **nombres euclidiens**.

- Ce sont tous les nombres qu'on obtient à partir des entiers en opérant successivement des **additions**, des **soustractions**, des **multiplications**, des **divisions** et l'**opération qui à un nombre positif *x* associe la racine carrée de *x***.

Le nombre suivant, par exemple, est l'un d'eux :

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}\,/\,(4+\sqrt{11})}}{\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{21}}}$$

Le nombre π n'est pas euclidien.

$$\sqrt[3]{2}$$

n'est pas un nombre euclidien.

Avec les cinq premiers axiomes, l'origami égale le pouvoir de construction de la règle et du compas.

Les axiomes 6 et 7 du pliage donnent-ils les moyens de le dépasser ?

Oui !

Nombres constructibles par origami

Avec les 7 plis, on obtient l'ensemble les **nombres constructibles par origami** qui est strictement plus grand que l'ensemble des nombres Euclidiens.

C'est l'ensemble des nombres qu'on obtient à partir des entiers en opérant successivement des **additions**, des **soustractions**, des **multiplications**, des **divisions**,

des opérations de calcul d'une racine carrée et

des opérations de calcul d'une racine cubique.

Exemple de nombre constructible par origami qui ne l'est pas par la règle et le compas :

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt[3]{21}}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}/(4+\sqrt{2})}}$$

L'étude de l'axiome 7 montre qu'il est superflu :

les constructions qu'il permet sont les mêmes que celles qu'on obtient avec les 6 premiers.

***OR* contient les nombres solutions**

d'une équation polynomiale de degré 1, 2, 3, ou 4.

Des procédés de pliage ont été décrits pour résoudre les équations quelconque de degré 3.

Ce pouvoir des constructions de l'origami est celui dont aurait disposé un géomètre grec utilisant la règle, le compas et ayant le pouvoir de tracer les coniques (ellipses, paraboles, hyperboles).

Notons que même avec les 7 plis, on ne réussira pas la quadrature du cercle et que de nombreux nombres algébriques (solutions d'équations polynomiales à coefficients entiers) sont aussi hors de portée des pliages décrits par les 7 axiomes.

Plis multiples et nombres algébriques

Si on envisage des plis multiples — plusieurs plis sont ajustés simultanément — on obtient un pouvoir de construction accru.

Robert Lang a montré que

• la quintisection (découpage en cinq angles égaux d'un angle donné) d'un angle quelconque n'est pas faisable en utilisant les 7 axiomes de base de l'origami,

• mais qu'en acceptant un double pliage, elle devient possible.

L'étude de ces nouveaux plis risque d'être difficile, et l'ordinateur va être indispensable.

C'est grâce à lui que Roger Alperin et Robert Lang ont calculé que le nombre d'axiomes à envisager pour les doubles plis est 489.

Roger Alperin et Robert Lang ont aussi établi que :

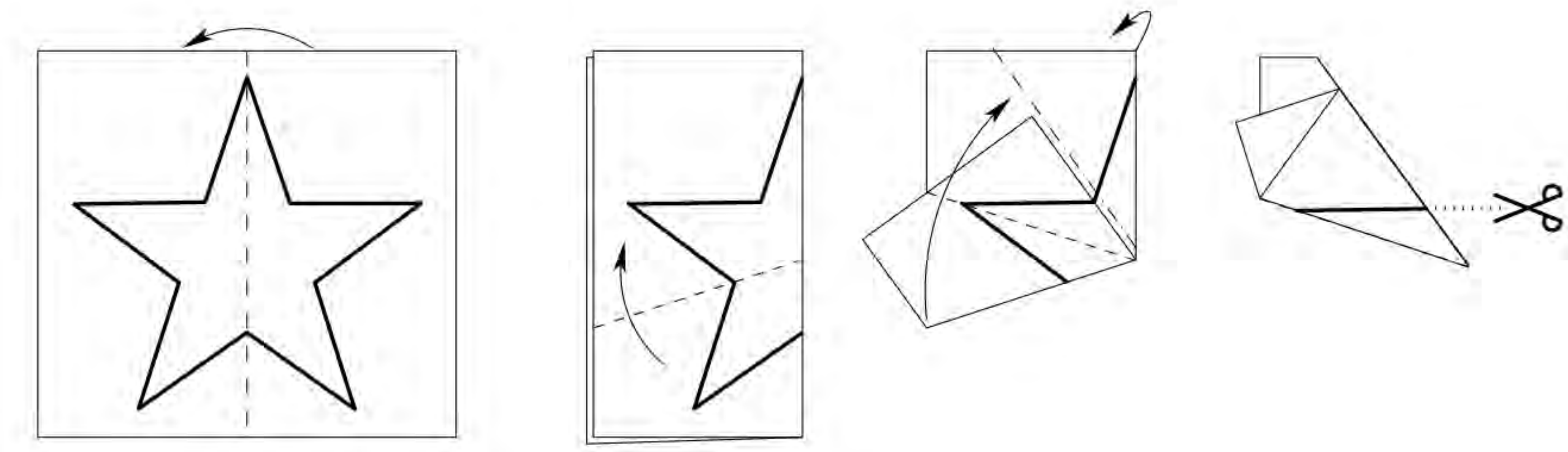
- en autorisant *n*-2 plis simultanés, il devenait possible de résoudre n'importe quelle équation polynomiale à coefficients entiers de degré *n*.

Cela établit donc que le pouvoir théorique de construction de l'origami conçu sous sa forme la plus générale avec des plis multiples donne tous les nombres algébriques... ce qui était inespéré.

Le théorème de la découpe unique

Le célèbre prestidigitateur américain **Harry Houdini** dans un de ses tours effectuait le pliage d'une feuille de papier, donnait un coup de ciseaux, dépliait la feuille qui montrait alors un trou parfait en forme d'étoile à cinq branches.

Le pliage qui permet cela n'est pas très compliqué.



Ce tour a suggèré une question que Martin Gardner posa il y a plus de vingt ans :

En opérant des pliages, puis un coup de ciseaux,

quelles formes peut-on obtenir ?

La réponse est étonnante :

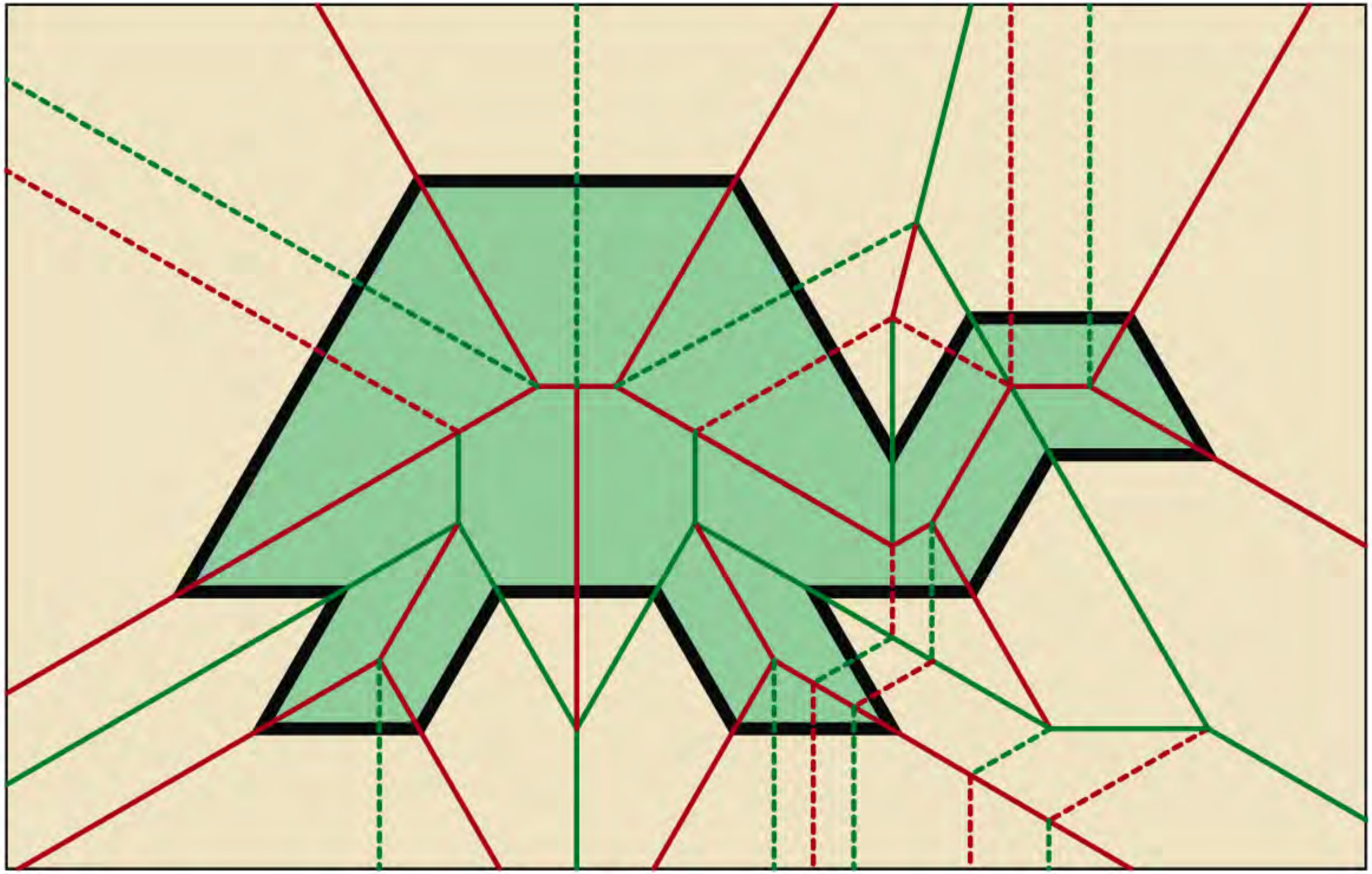
Tout dessin composé de traits rectilignes peut être obtenu.

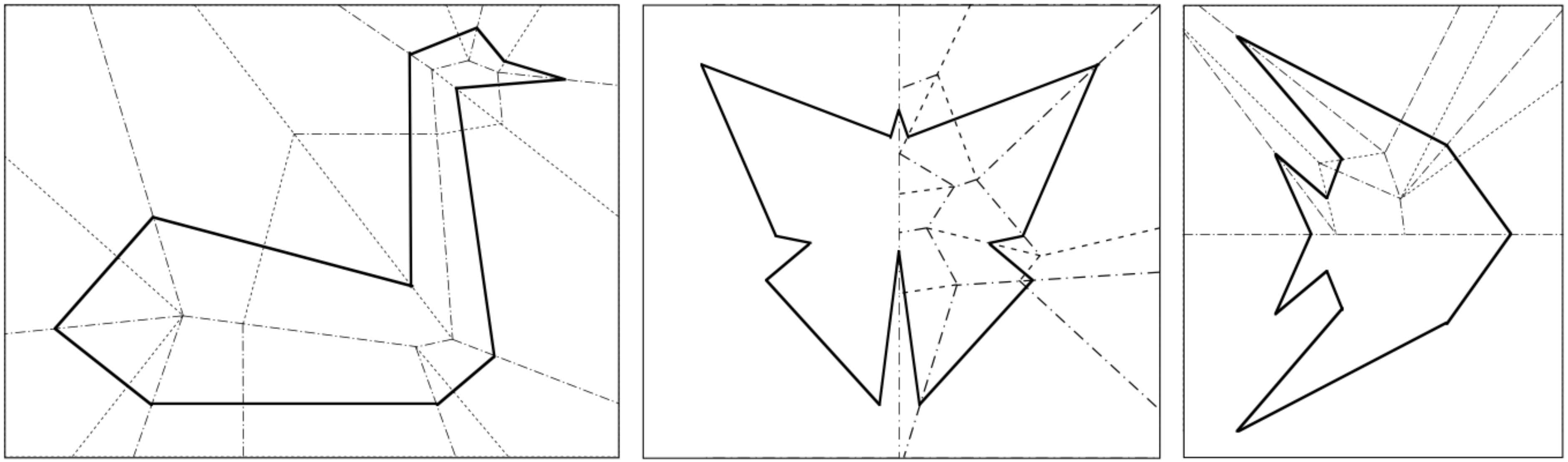
Si vous voulez qu'en dépliant la feuille qui vient d'être découpée par un coup de ciseaux unique, on voit apparaître une tortue, c'est possible.

Ce magnifique résultat de la découpe unique (**«fold-and-cut theorem»**) est dû à Eric Demaine et Martin Demaine (le père du premier) et Anna Lubiw.

Démontré en 1999.

La démonstration décrit un algorithme qui fournit les pliages à opérer.





Plier une feuille en deux douze fois de suite

Combien de fois peut-on replier une feuille de papier sur elle-même en deux par le milieu ?

Le problème admet deux versions :

- soit on autorise des plis selon une seule direction (on partira utilisera une feuille très allongée),
- soit on s'autorise à plier la feuille en deux selon deux axes perpendiculaires.

Il se racontait que 8 était le maximum possible pour ce nombre de pliages successifs en deux.

Une jeune américaine, **Britney Gallivan**, s'est prise de passion pour le problème réussissant à la fois à en proposer une formule mathématique intéressante aidant à comprendre le problème et à pousser le record de pliage bien au-delà de tout ce qu'on imaginait possible.

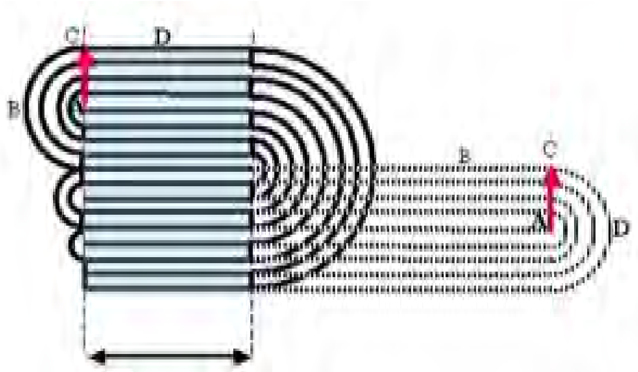
Après avoir plié une feuille d'or **douze fois en deux** sur elle-même selon **deux directions**, la jeune fille encore élève au collège se procurera un rouleau de papier toilette de 1200 mètres de long et pu le replier en deux sur lui-même **douze fois** de suite **dans une même direction**.

Depuis des élèves d'un autre collège américain en collant plusieurs longs rouleaux de papier toilette ont su plier la bande résultante **treize** fois de suite.

Plus intéressant Britney Gallivan a étudié le problème physico-géométrique de ce type de pliages.

Contrairement à ce qu'on serait tenté de penser pour augmenter le record d'une unité avec une bande d'épaisseur fixée, il ne faut pas une bande **deux fois plus longue**, mais environ une bande **quatre fois plus longue.**

Quand on plie la bande déjà pliée, une partie de la bande sert à joindre les parties horizontales.



La formule démontrée par Gallivan pour la longueur perdue, *L*, dans ces morceaux servant à raccorder les parties horizontales du pliage est :

$$L = e \text{ Pi } (2^n + 4)\ (2^n - 1)/6$$

où *e* est l'épaisseur du papier et *n* le nombre de plis effectués.

On voit qu'elle est multipliée par 4 environ quand *n* augmente d'une unité.

Conclusion

L'origami est un vrai sujet de recherche

Bien d'autres aspects du pliage sont aujourd'hui à l'étude, et on découvre que derrière ces problèmes géométriques d'apparence simple se cachent des merveilleuses mathématiques concernant la géométrie, la théorie des nombres, l'algèbre, l'algorithmique et la théorie de la complexité.

On est loin d'avoir fait le tour du sujet qui prend une ampleur étonnante :

- les actes du congrès de 2011 sur l'Origami, organisé par l'Université de Singapour réunissent une cinquantaine de communications et occupent **654 pages** !

Bibliographie

• Robert Lang, *Origami Design Secrets*, *Mathematical Methods for an ancient art*, CRC Press, 2d edition, 2012.

• Joseph O'Rourke, *How to Fold it, The Mathematics of Linkage, Origami and Polyhedra*, Cambridge University Press, 2011.

• Erik Demaine, Joseph 0'Rourke, *Geometric Folding Algorithms*, Cambridge University Press, 2007.

• Roger Alperin, Robert Lang, *One-, two, and multi-fold origami axioms*, Origami 4, 371-393, 2006.

• Roger Alperin, *A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers*, New York J. Math 6, 119-133, 2000.

• Marshall Bern, Barry Hayes, *The Complexity of Fat Origami*, Proceedings of the 7th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 175–183, 1996.

• Thomas Hull, *On the Mathematics of Flat Origamis*, Congressus Numerantium, 100, 215-224, 1994.

• Jacques Justin, *Aspects mathématiques du pliage de papier*, Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, H. Huzita, ed., 263–277, 1989.